

Robotik I: Einführung in die Robotik **Dynamik**

Tamim Asfour

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



Robotermodellierung – Überblick

- Geometrische Modellierung
 - Geometrie: mathematische Beschreibung der Form von Körpern

- Kinematische Modellierung
 - Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme

- **Dynamische Modellierung**
 - Dynamik: Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

Inhalt

- Geometrisches Modell
- **Dynamisches Modell**
- Modellierung der Dynamik
 - Methode nach Lagrange
 - Methode nach Newton-Euler

Dynamisches Modell: Definition & Zweck

■ Definition:

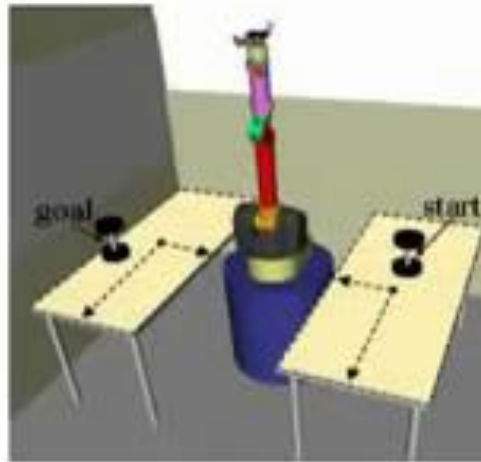
- Das dynamische Modell beschreibt den Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten.

■ Zweck:

- Analyse der Dynamik
- Synthese mechanischer Strukturen
- Modellierung elastischer Strukturen
- Reglerentwurf

Motivation

Moving a Heavy Dumbbell with Sliding



Task: Move the dumbbell from one table to the other.

Constraints:

1. Stay within torque limits of arm for dumbbell mass w .
2. Sliding the dumbbell is allowed.

<https://personalrobotics.ri.cmu.edu/projects/cplan.php>
<http://www.youtube.com/watch?v=APAhS7GC090>

Motivation



Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Roboter besteht aus n Partikeln mit Masse m_i und Position $\mathbf{r}_i$
- Newtons zweites Gesetz: $\mathbf{F}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$ $i = 1, \dots, n$
- Partikel können sich wegen Verbindungen und Gelenken nicht unabhängig voneinander bewegen
 - Einführung von Einschränkungen (**constraints**) der Form
$$g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$
 - Einschränkungen dieser Art nennt man auch **holonome Einschränkungen**
 - Einschränkungen wirken auf den Roboter durch Ausübung von Einschränkungskräften (**constraint forces**)

Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Parameter im allgemeinen Modell

$$3n + k \quad (\text{da } \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3)$$

- Tatsächliche Freiheitsgrade

$$3n - k$$

- **Ziel:**

Minimaler Parametersatz, der das System vollständig beschreibt

➔ **Generalisierte Koordinaten**

Dynamisches Modell: Generalisierte Koordinaten

■ Definition:

Minimaler Satz an voneinander unabhängigen Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt.

■ Generalisierte Koordinaten:

$$q_1, \dots, q_m \quad \text{mit} \quad m = 3n - k$$

■ Gesucht:

Funktionen für Position der Massepunkte

$$\mathbf{r}_i = f_i(q_1, \dots, q_m) \quad i = 1, \dots, n$$

die gleichzeitig die Einschränkungen (constraints) einhalten

$$g_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

Generalisierte Koordinaten : Beispiel

■ Position der Masse: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

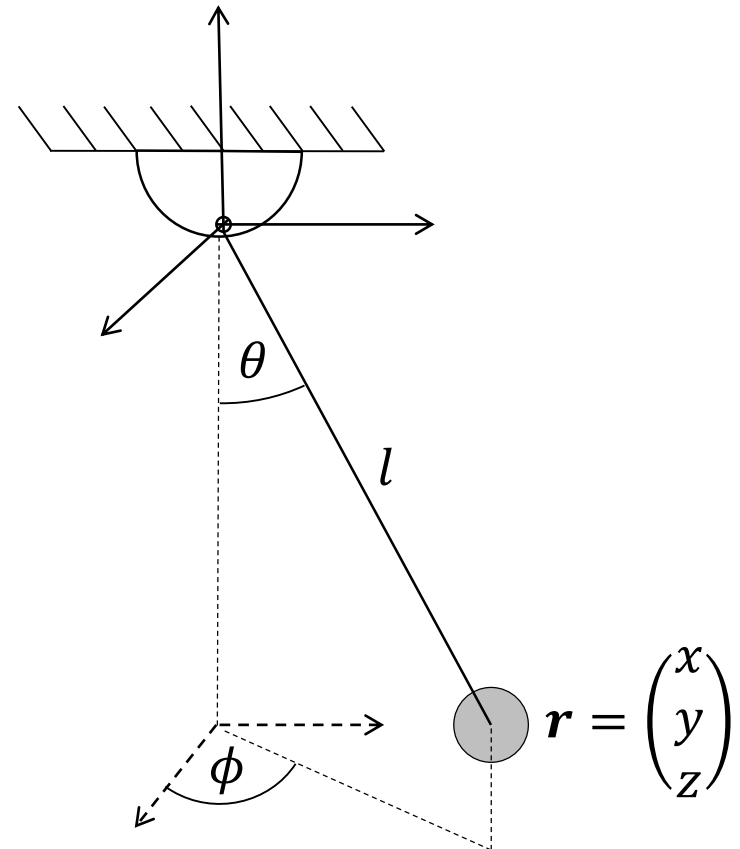
■ Einschränkung auf Kugeloberfläche

$$|\mathbf{r}| = l \Leftrightarrow |\mathbf{r}| - l = 0$$

$$g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| - l = 0$$

■ Gen. Koordinaten: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$



Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

Im dynamischen Modell werden die Beziehungen zwischen Kräften/Momenten und den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente dargestellt.

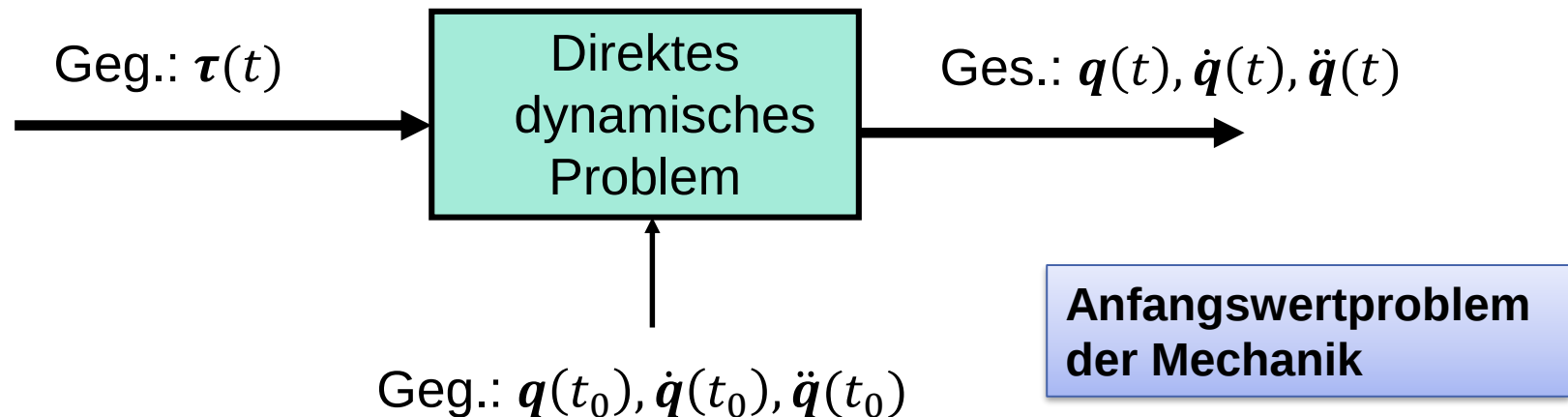
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

- $\boldsymbol{\tau}$: $n \times 1$ Vektor der generalisierten Kräfte
 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$: $n \times n$ Massenträgheitsmatrix
 $\mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$: $n \times 1$ Vektor der Zentripetal- und Corioliskomponenten
 $\mathbf{g}(\mathbf{q})$: $n \times 1$ Vektor der Gravitationskomponenten
 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$: $n \times 1$ Vektor der generalisierten Koordinaten
(Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung)

- Reibung kann als zusätzlicher Term einfließen, wird aber häufig vernachlässigt

Direktes dynamisches Problem

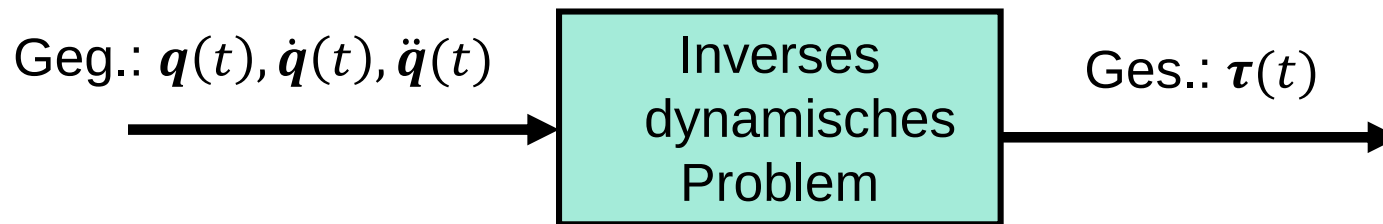
- Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand wird unter Verwendung des dynamischen Modells die sich ergebenden Bewegungsänderungen berechnet.



- $\tau = M(q) \cdot \ddot{q} + c(\dot{q}, q) + g(q)$
- Differentialgleichung nach $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$ lösen

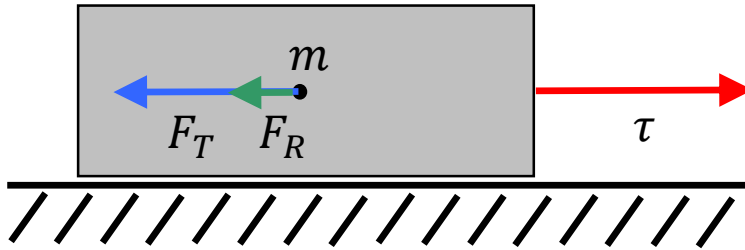
Inverses dynamisches Problem

- Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und -momente ermittelt werden.



- $\tau = M(q) \cdot \ddot{q} + c(\dot{q}, q) + g(q)$
- Rechten Teil der Gleichung berechnen durch Einsetzen

Dynamisches Modell: Beispiel



$$F_T = -m\ddot{x}$$

Trägheit

$$F_R = -K_{GR}\dot{x}$$

Gleitreibung

τ

Externe Kraft

- Kräftebilanz: $\tau = -(F_T + F_R)$
- Bewegungsgleichung: $\tau = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$
- **Inverses Problem:** gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft τ wirkt auf das System.
- **Direktes Problem:** gegeben externe Kraft und aktueller Bewegungszustand, berechne neue Beschleunigung.

Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
 - Methode nach Lagrange
 - Methode nach Newton-Euler

Modellierung der Dynamik

Methoden:

- Lagrange: Analytische Methode
 - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
 - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen

- Newton-Euler: Synthetische Methode
 - Basiert auf linearem Impuls und Drehimpuls (Drall)
 - Isoliertes betrachten der Armelemente

Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
 - Methode nach Lagrange
 - Methode nach Newton-Euler

Methode nach Lagrange

- Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q})$$

- Bewegungsgleichung:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- q_i : i-te Komponente der generalisierten Koordinaten
- τ_i : i-te Komponente der generalisierten Kräfte

Methode nach Lagrange: Vorgehen

- **Ziel:** Ermittle für jedes Gelenk i eines Roboters die Bewegungsgleichung

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- **Vorgehen:**

1. Berechne E_{kin} und E_{pot}
2. Drücke E_{kin} und E_{pot} in generalisierten Koordinaten aus

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q})$$

3. Berechne die Ableitungen

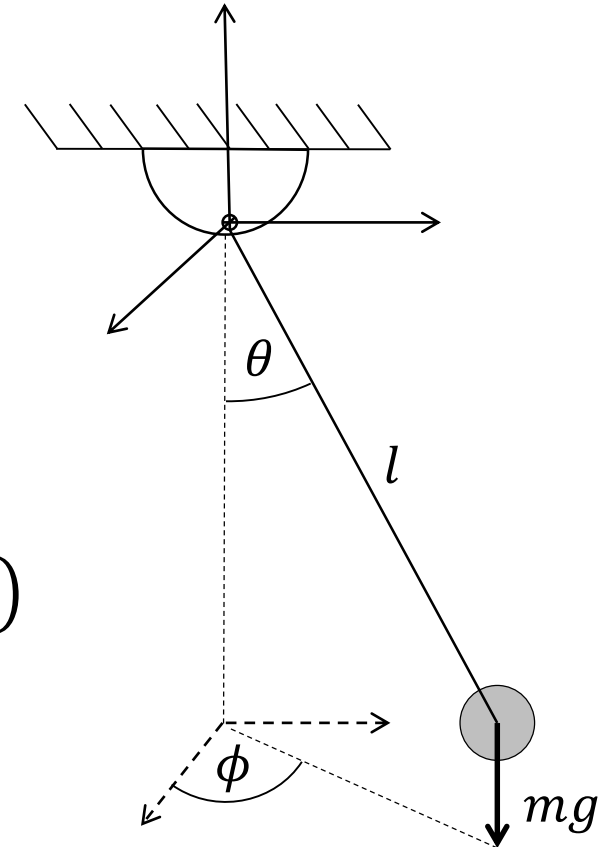
Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (1)

■ 3D-Pendel mit Gravitation

■ $\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$

■ $E_{kin} = \frac{1}{2} m l^2 |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta)$

■ $E_{pot} = -m \cdot g \cdot h = -m g \cdot (l \cdot \cos \theta)$



Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (2)

■ Lagrange-Funktion mit $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$

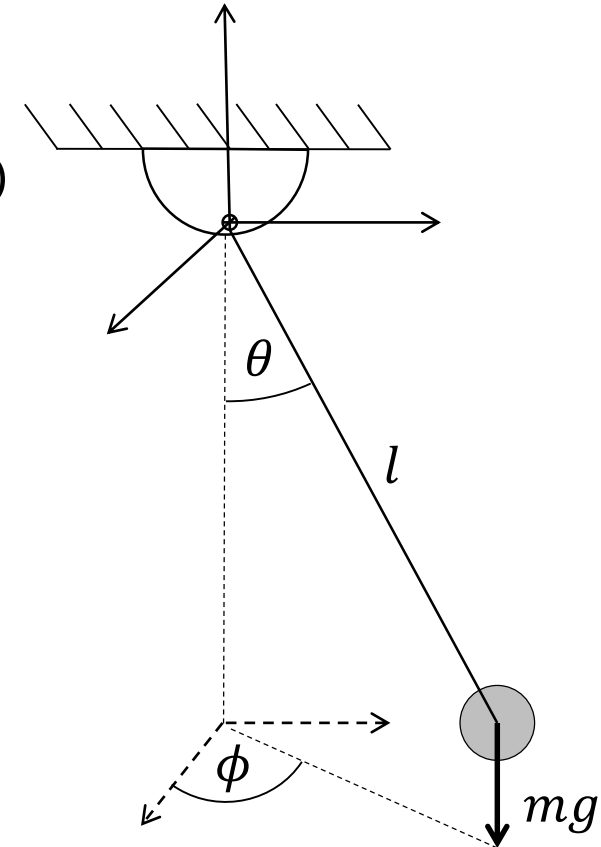
$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{pot}(\mathbf{q})$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta) + m g l \cdot \cos \theta$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

■ Ableiten:

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2 - m g l \cdot \sin \theta$
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) = m l^2 \ddot{\theta}$
- $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta) = m l^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\phi} + 2 m l^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi}$



Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (3)

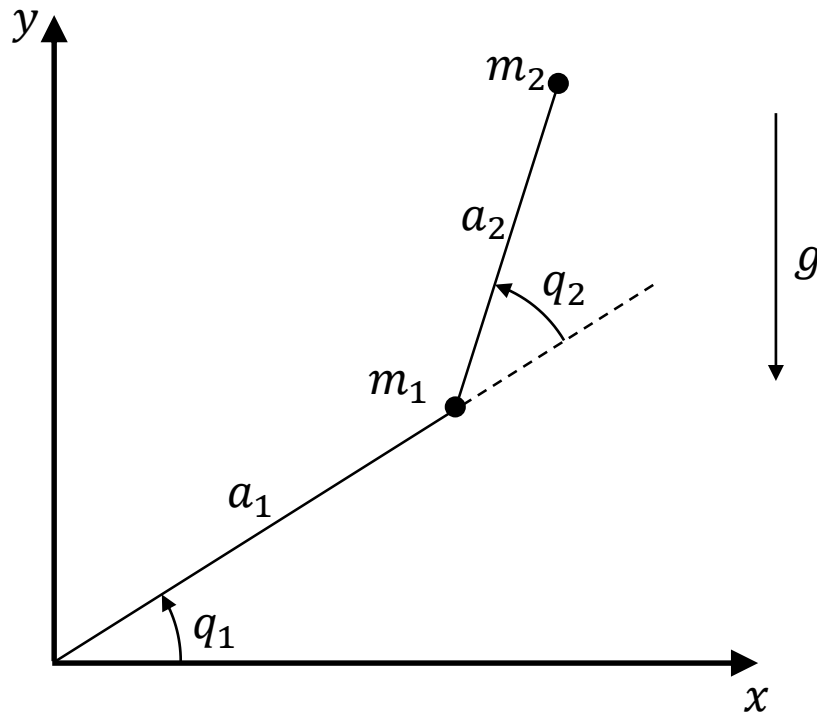
■ Bewegungsgleichung des 3D-Pendels

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2 \\ 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ Entspricht allgemeiner Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + g(\mathbf{q})$$

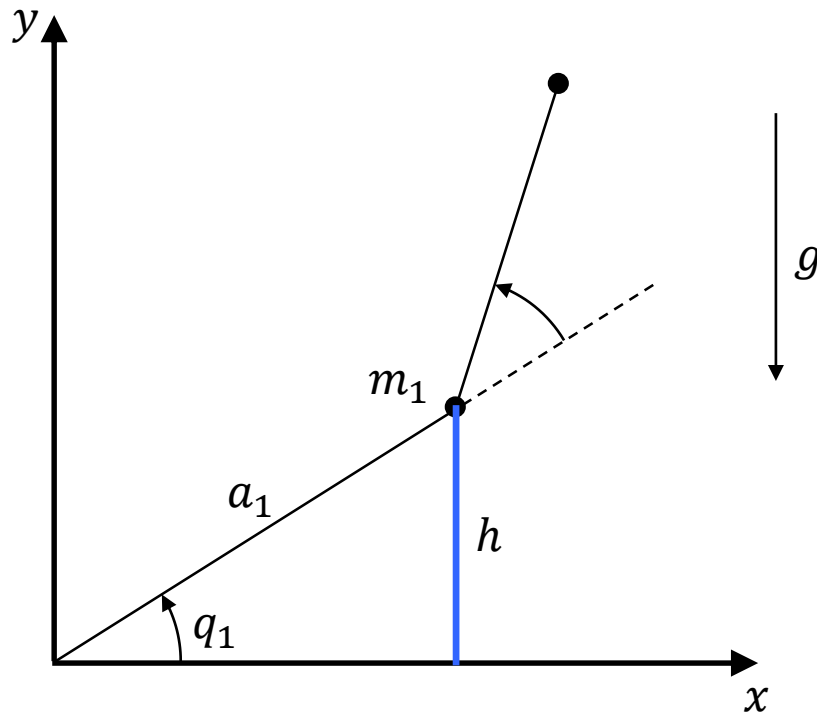
Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (1)



■ Idealisierung:

- Masse der Armelemente als Punktmassen in m_1 und m_2
- Keine Reibung

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (2)



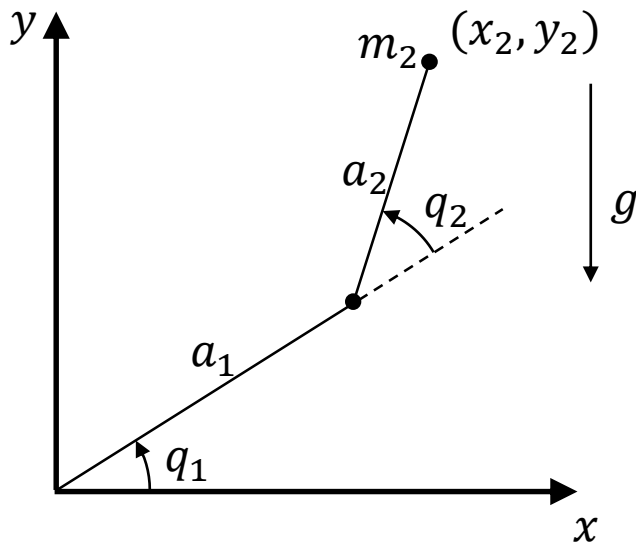
■ Gelenk 1:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$E_{pot,1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (3)

■ Gelenk 2:



Position:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (4)

■ Gelenk 2:

■ Kinetische Energie:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = a_1^2 \dot{q}_1^2 + a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

■ Potentielle Energie:

$$E_{pot,2} = m_2 g y_2 = m_2 g [a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)]$$

■ Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2) \\ - (m_1 + m_2) g a_1 \sin(q_1) - m_2 g a_2 \sin(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (5)

■ Bewegungsgleichung

■ Gelenk 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2\dot{q}_1 + m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1a_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2)a_1^2\ddot{q}_1 + m_2a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2a_1a_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos(q_2) - m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2)ga_1\cos(q_1) - m_2ga_2\cos(q_1 + q_2)$$

■ Gelenk 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1a_2\dot{q}_1\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2a_1a_2\ddot{q}_1\cos(q_2) - m_2a_1a_2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2a_1a_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\sin(q_2) - m_2ga_2\cos(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (6)

■ Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 + m_2a_2^2 + 2m_2a_1a_2 \cos(q_2) & m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos(q_2) \\ m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos(q_2) & m_2a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2) \\ m_2a_1a_2\dot{q}_1^2\sin(q_2) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)ga_1 \cos(q_1) + m_2ga_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2ga_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

■ Zusammengefasst:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

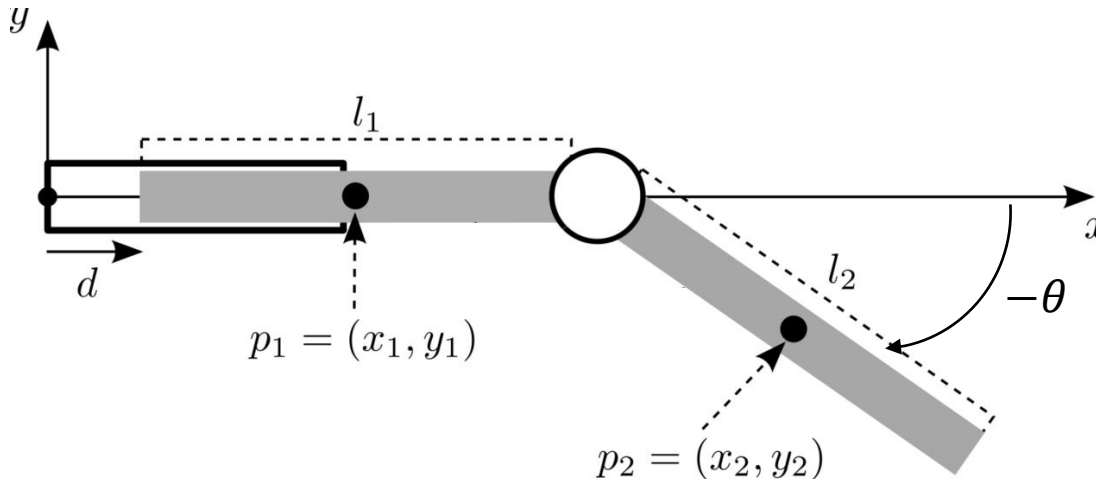
Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (1)

■ Gelenke

- Lineargelenk: d
- Rotationsgelenk: θ

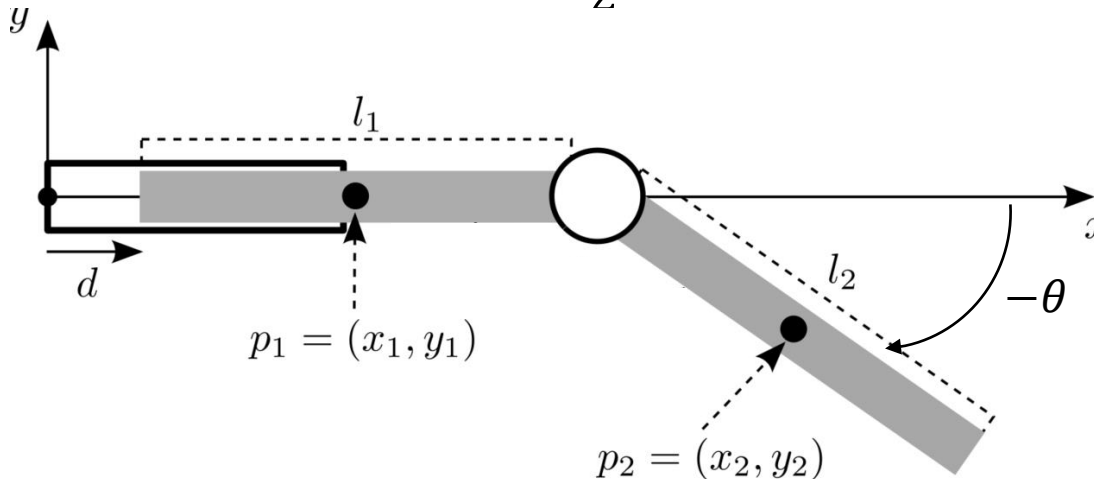
■ Masseschwerpunkte (Punktmassen m_1, m_2)

- $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$



Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (2)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2}l_1 + d \\
 y_1 &= 0 \\
 x_2 &= l_1 + d + \frac{1}{2}l_2 \cos(\theta) \\
 y_2 &= \frac{1}{2}l_2 \sin(\theta)
 \end{aligned}$$



Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (3)

■ Bewegungsgleichung: $Q = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta L}{\delta q}$ mit $L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$

■ Kinetische Energie

■ ergibt sich für s_1 aus der Translationsgeschwindigkeit $\dot{d}$:

$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}^2$$

■ ergibt sich für s_2 aus der Translationsgeschwindigkeit $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$, des Trägheitsmoment J und der Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},2} &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

■ Trägheitsmoment für Stab mit vernachlässigbarem Radius $J = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (4)

■ Translationsgeschwindigkeiten

$$\text{■ } \dot{x}_2 = \dot{d} - \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta)$$

$$\text{■ } \dot{y}_2 = \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta)$$

■ Daraus folgt:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{d}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{d} \dot{\theta} \sin(\theta) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2$$

■ Potentielle Energie und Ableitungen können analog zum ersten Beispiel bestimmt werden

■ Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) & \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_2 g \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Methode nach Lagrange: Zusammenfassung

- Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen müssen nur die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden.
- Die Bewegungsgleichungen folgen dann formal durch differenzieren:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit} \quad L = E_{kin} - E_{pot}$$

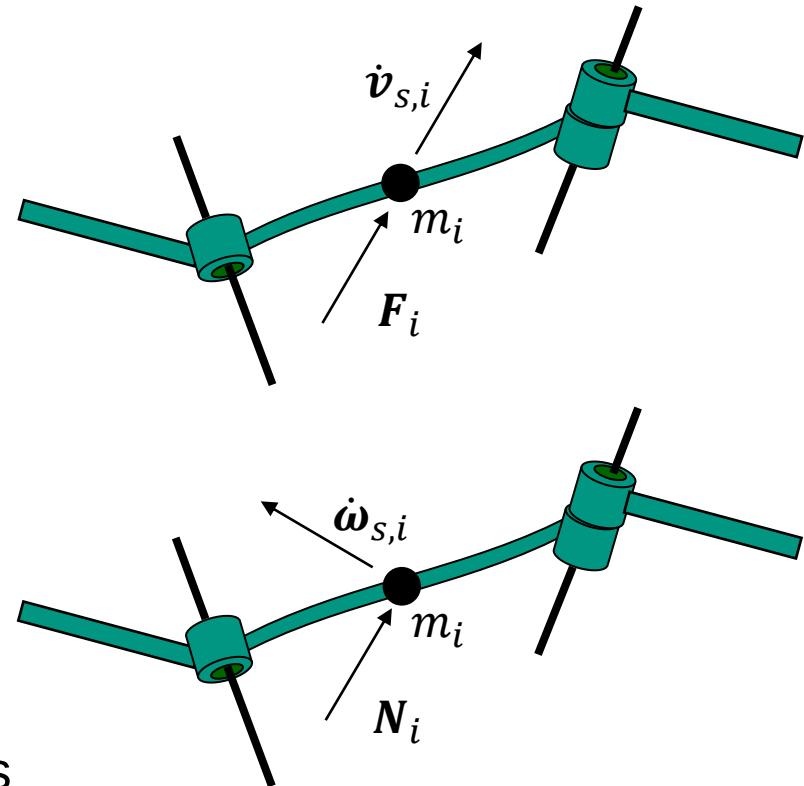
- Einfaches Aufstellen der Gleichungen
- Geschlossenes Modell
- Analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich $O(n^3)$
(n : Anzahl der Gelenke)
- Nur Antriebsmomente werden berechnet

Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
 - Methode nach Lagrange
 - Methode nach Newton-Euler

Methode nach Newton-Euler: Grundprinzip

- Betrachtung des Massenzentrums eines einzelnen Armelementes
 - Kraft = Impuls abgeleitet nach Zeit (Zweites Newtonsches Gesetz)
$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_{s,i}) = m_i \dot{\mathbf{v}}_{s,i}$$
 - Drehmoment = Drehimpuls abgeleitet nach Zeit
$$\mathbf{N}_i = \frac{d}{dt}(I_i \boldsymbol{\omega}_{s,i}) = I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s,i}$$
- Kräfte und Momente, die auf ein Armelement wirken, lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.



Methode nach Newton-Euler: Verkettung

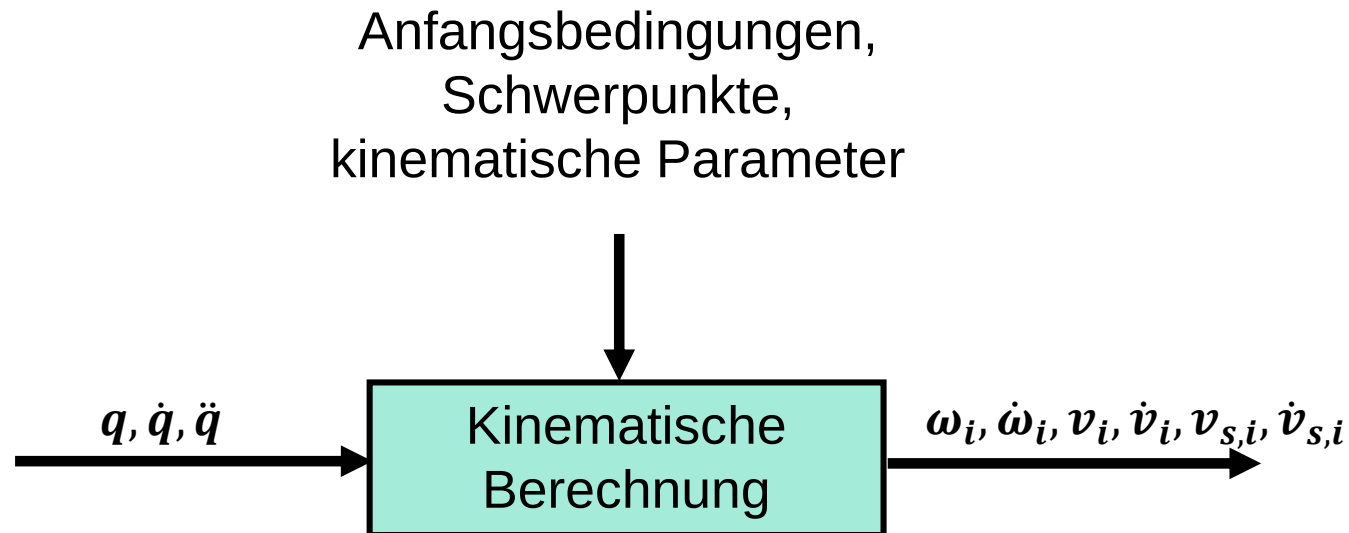
- Die Beschleunigungen $\dot{v}_{s,i}$ und $\dot{\omega}_{s,i}$ eines Armelementes i hängen von den Beschleunigungen der vorhergehenden Armelemente ab.
 - Beschleunigungen können über kinematisches Modell **von der Basis zum Greifer** rekursiv berechnet werden
 - Vorwärtsgleichungen
- Die Kraft F_i und das Drehmoment N_i , die auf ein Armelement i wirken, hängen von den nachfolgenden Armelementen ab.
 - Kräfte und Momente können **vom Greifer zur Basis** rekursiv berechnet werden
 - Rückwärtsgleichungen

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Aus dem kinematischen Robotermodell und dem Systemzustand lassen sich Winkelgeschwindigkeiten, translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gelenkes und Armelementes i im Basiskoordinatensystem bestimmen.

- Bestimmt werden:
 - Winkelgeschwindigkeit ω_i
 - Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_i$
 - Geschwindigkeit v_i und Beschleunigung $\dot{v}_i$ der Basen der Koordinatensysteme
 - Geschwindigkeiten $v_{s,i}$ und Beschleunigungen $\dot{v}_{s,i}$ der Massenmittelpunkte der Armelemente

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen



- Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für Armelement $i + 1$ lassen sich rekursiv unter Berücksichtigung der Kinematik aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Armelementes i berechnen.

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Die Funktionen G_i lassen sich aus den Gleichungen für Kraft und Drehmoment ableiten

Eingabedaten: $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$



Rekursive Berechnung der Kinematik von der Basis zum Greifer (Vorwärtsgleichungen)

$$\begin{aligned}
 \omega_{i+1} &= G_1(\omega_i, q_{i+1}, \dot{q}_{i+1}) \\
 \dot{\omega}_{i+1} &= G_2(\omega_i, \dot{\omega}_i, q_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, \ddot{q}_{i+1}) \\
 v_{i+1} &= G_3(v_i, \omega_i, q_{i+1}) \\
 \dot{v}_{i+1} &= G_4(\dot{v}_i, \omega_i, \dot{\omega}_i, q_{i+1}) \\
 v_{s,i+1} &= G_5(v_{i+1}, \omega_{i+1}) \\
 \dot{v}_{s,i+1} &= G_6(\dot{v}_{i+1}, \omega_{i+1}, \dot{\omega}_{i+1})
 \end{aligned}$$

Startwerte der
Rekursionsformeln
 $\omega_0, \dot{\omega}_0, v_0, \dot{v}_0$

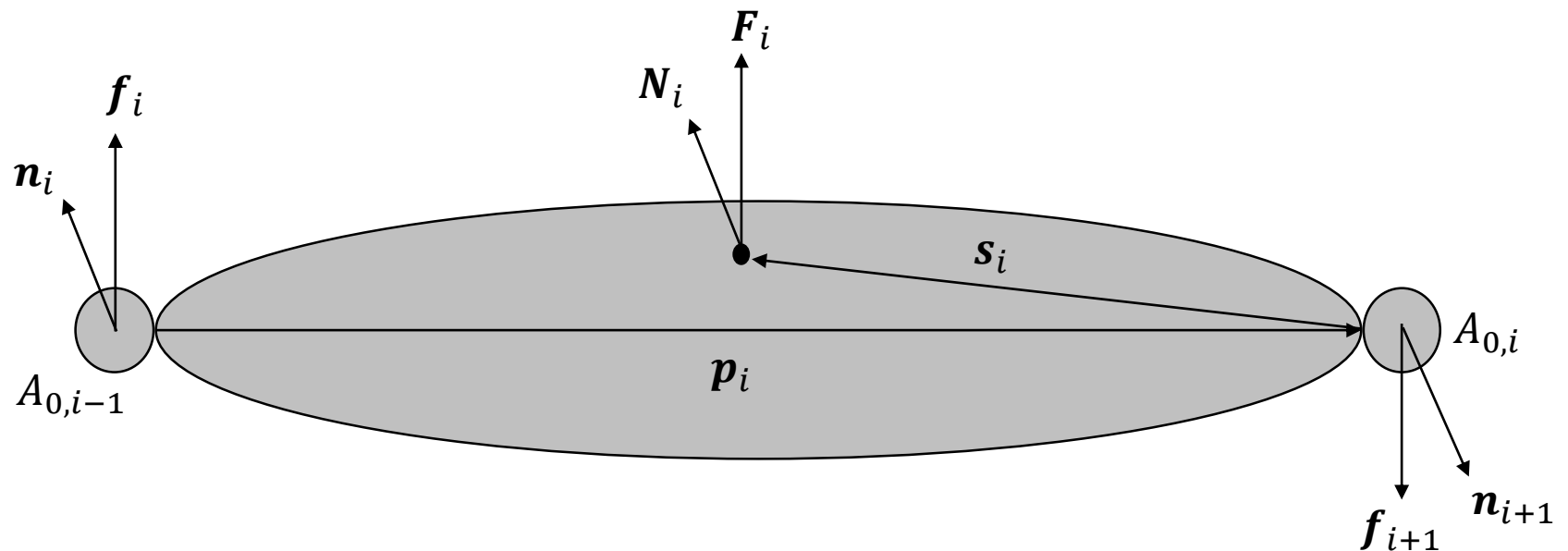


Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Beginnend vom Greifer des Roboters lassen sich die dynamische Größen des Systems rekursiv bis zur Basis berechnen. Dabei werden die im Vorwärtsschritt berechneten Größen verwendet.
- Folgende dynamische Größen werden bestimmt:
 - Auftretende Kraft F_i im Schwerpunkt von Armelement i
 - Auftretender Drehimpuls N_i im Schwerpunkt von Armelement i
 - Kraftvektor f_i ausgeübt von Armelement $i - 1$ auf Armelement i
 - Momentvektor n_i ausgeübt von Armelement $i - 1$ auf Armelement i
 - Skalares Drehmoment τ_i am i -ten Gelenk

Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Betrachtung eines einzelnen Armelements



Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Verwendung des Kraft-Momenten-Satzes:

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1}$$

- und des Drehimpulssatzes:

$$\mathbf{N}_i = I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (-\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{F}_i - \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_{i+1}$$

aus Vorwärtsgleichungen

- Rekursive Berechnung der dynamischen Größen des Armelements i
- m_i : Masse des Armelements i
- I_i : Trägheitstensor des Armelements i
- $\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_i$: Geometrische Betrachtung auf vorheriger Folie

Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

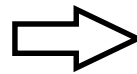


Rekursive Berechnung der Dynamik vom Greifer zur Basis (Rückwärtsgleichungen)

Externe Kräfte und
Momente an Endeffektor
als Startwerte

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ex}$$

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{N}_{ex}$$



$$\mathbf{F}_i = H_1(\dot{\mathbf{v}}_{s,i})$$

$$\mathbf{N}_i = H_2(\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$$

$$\mathbf{f}_i = H_3(\mathbf{f}_{i+1}, \mathbf{F}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

$$\mathbf{n}_i = H_4(\mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{f}_{i+1}, \mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

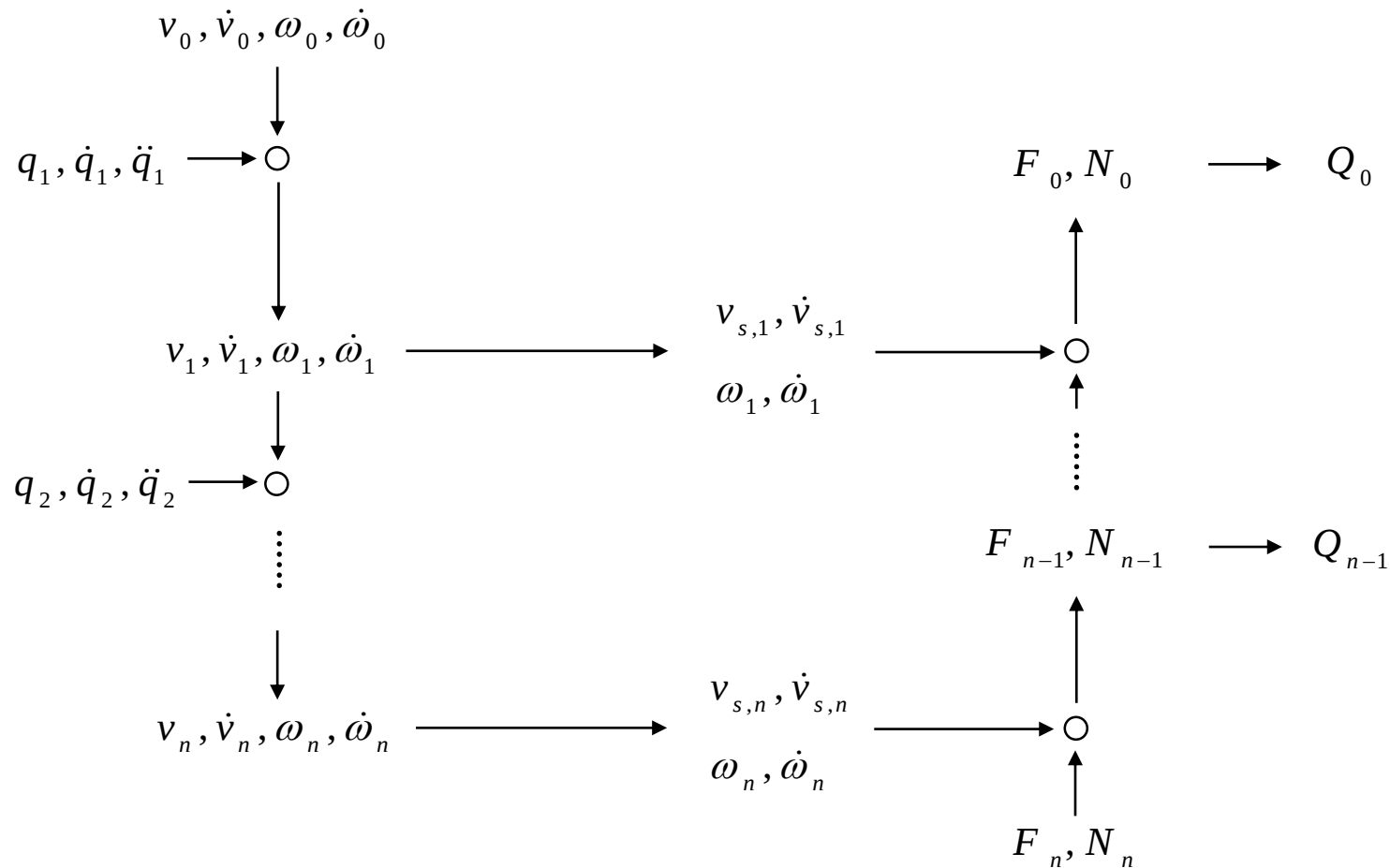
$$\tau_i = H_5(\mathbf{n}_i, \mathbf{q}_i)$$



$$\boldsymbol{\tau}(t)$$

Methode nach Newton-Euler: Zusammenfassung

(Bewegung der Basis)



(Kräfte und Momente am Endeffektor)

Methode nach Newton-Euler: Eigenschaften

- Beliebige Anzahl von Gelenken
- Belastungen der Armelemente werden berechnet
- Aufwand $O(n)$ (n : Anzahl der Gelenke)
- Rekursion